Polynômes de Jacobi généralisés et Intégrales de Selberg

Daniel Barsky
Université Paris 13
Institut Galilée
LAGA, URA CNRS n°742
Av J.B. Clément
F-93430 VILLETANEUSE
e.mail: barsky@math.univ-paris13.fr

Michel Carpentier
Université Paris 6
Institut de Mathématiques
UMR CNRS n°9994
4, place Jussieu
F-75252 PARIS CEDEX 05
e.mail: mic@ccr.jussieu.fr

Submitted: January 24, 1995; Accepted: January 24, 1995

Ce travail est dedie a Dominique Foata pour son 60-ième anniversaire

Résumé

G. Anderson a développé une méthode nouvelle pour calculer l'intégrale de Selberg. Nous montrons que cette méthode s'applique aussi pour calculer une généralisation de l'intégrale de Selberg étudiée par J. Kaneko.

Le résultat s'exprime à l'aide des polynômes de Jacobi symétriques à plusieurs variables. La preuve utilise les opérateurs de montée et de descente qui leur sont associés.

1 Introduction

Selberg [30] a étudié l'intégrale suivante:

$$S_n^{(a,b,c)} = \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^{2c}\, d\underline{x} \qquad (1)$$

Il a montré que:

$$S_n^{(a,b,c)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(a+jc)\ \Gamma(b+jc)\ \Gamma((j+1)c)}{\Gamma(a+b+(n+j-1)c)\ \Gamma(c)} \tag{2}$$

Ultérieurement ce résultat a été relié aux conjectures de Macdonald, [22], [25] sur les sytèmes de racines. En particulier il a permis de démontrer les identités de termes constants pour les systèmes de racines affines de type BC_n et A_n, [25], [16], G_2 [13]. Ces conjectures ont été démontrées par G. J. Heckmann et E. M. Opdam [18], [15], [26], [27], [28].

On s'intéresse à la valeur des intégrales du type:

$$J_n^{(a,b,c)}(\mathcal{X}) \overset{déf}{=} \frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \mathcal{X}(\underline{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\leq i<j\leq n} |x_i - x_j|^{2c}\, d\underline{x} \tag{3}$$

où $\mathcal{X}(\underline{x}) = \mathcal{X}(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme symétrique en $(x_1, \ldots, x_n)$.

Dans [3] Aomoto indique que pour des raisons cohomologiques le rapport de la valeur de cette intégrale à l'intégrale de Selberg est un nombre rationnel. Il a calculé l'intégrale (3) lorsque $\mathcal{X}(\underline{x})$ est l'une des fonctions symétriques élémentaires:

$$\mathcal{X}(\underline{x}) = \left\{ \begin{array}{ccccc} e_1(\underline{x}) & = & e_1(x_1,\ldots,x_n) & = & (-1)\sum_{i=1}^n x_i \\ e_2(\underline{x}) & = & e_2(x_1,\ldots,x_n) & = & \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_n(\underline{x}) & = & e_n(x_1,\ldots,x_n) & = & (-1)^n \prod_{i=1}^n x_i \end{array} \right.$$

Il montre qu'elle est proportionnelle, avec un facteur de proportionnalité rationnel explicite, au produit d'un coefficient convenable du polynôme de Jacobi, $\mathbf{P}_n^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y)$, par l'intégrale de Selberg.

Rappelons que les polynômes de Jacobi, $\mathbf{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$, sont les polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire sur l'espace, $\mathbb{R}[x]$ des polynômes à coefficients réels, $\langle f\ ,\ g\rangle_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta} f(x)\cdot g(x)\, dx$, tels que $\mathbf{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ soit de degré n et normalisé par:

$$\mathbf{P}_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(1+\alpha)(1+\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!} = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}$$

Le résultat d'Aomoto s'exprime en fait plus agréablement en utilisant des polynômes de Jacobi unitaires, notés $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, cf. la formule (4). Ce sont les polynômes unitaires associés aux polynômes de Jacobi. Ces polynômes de Jacobi unitaires correspondent au cas d'une variable des polynômes de Jacobi symétriques introduits par Debiard, [7].

Le résultat d'Aomoto, obtenu à l'aide de la formule de Stokes, est le suivant[1]. Soit:

$$A_n^{(a,b,c)}(y) \overset{déf}{=} \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n} \prod_{i=1}^{n}(y-x_i) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i-x_j|^{2c} d\underline{x}$$

Alors:

$$A_n^{(a,b,c)}(y) \;=\; \left\{ \begin{array}{l} (-c)^n\, n!\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(a+b+(n+i-1)c)}\right) S_n^{(a,b,c)} \mathbf{P}_n^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y) \\ \\ (-2)^{-n}\, S_n^{(a,b,c)} P_n^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y) \end{array} \right. \tag{4}$$

Ce résultat permet par identification des coefficients de y^i dans les deux membres de calculer les intégrales (3) lorsque $\mathcal{X}(\underline{x})$ est une fonction symétrique élémentaire.

J. Kaneko, [17], a généralisé le résultat d'Aomoto. Il exprime $J_n^{(a,b,c)}(\mathcal{X})$ dans le cas où $\mathcal{X}(\underline{x}) = \displaystyle\prod_{j=1}^{m} e_i(\underline{x})^{n_i}$, à l'aide des coefficients des polynômes de Jacobi généralisés symétriques (cf. [7]) introduits par Debiard, [7] et Koornwinder, [19].

Soit $P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(t_1,t_2,\cdots,t_m)$ le polynôme de Jacobi généralisé symétrique à m variables[2] associé à la partition $\underline{n}=(n,n,\cdots,n)$ de $n\cdot m$ en m parts égales à n, cf [7].

Soit $\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ et $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ des variables indépendantes. Soit $\chi_u(\underline{y},\underline{x}) = \displaystyle\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(y_j-x_i)^u$ un polynôme symétrique en $\underline{y}$ et $\underline{x}$

---

[1]Notre définition de l'intégrale d'Aomoto diffère pour des raisons de commodité de calcul par le facteur $\frac{(-1)^n}{n!}$ de la sienne.

[2]La normalisation des polynômes de Jacobi ordinaires, [29] n'est pas la même que celle des polynômes de Jacobi généralisés symétriques, [7], lorsqu'on restreint le nombre de variables à 1, d'où l'introduction des polynômes de Jacobi unitaires.

si $u \in \mathbb{N}$ et plus généralement une fonction symétrique en $\underline{y}$ et $\underline{x}$ si $u \in \mathbb{R}$. On posera $\chi_1(\underline{y}, \underline{x}) = \chi(\underline{y}, \underline{x})$.

J. Kaneko, [17], calcule pour $u = 1$ et m quelconque, donc en fait aussi pour u entier positif, et pour $u = -c$ l'intégrale suivante[3]:

$$A^{(a,b,c)}_{n,\chi_u}(\underline{y}) \overset{déf}{=} \frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \chi_u(\underline{y}, \underline{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j|^{2c} \, d\underline{x} \quad (5)$$

où $d\underline{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ et où a, b, c sont des réels suffisament grands pour que l'intégrale converge (par exemple $a, b, c > 0$). Il montre pour $u = 1$ que:

$$\begin{aligned} A^{(a,b,c)}_{n}(\underline{y}) &\overset{déf}{=} A^{(a,b,c)}_{n,\chi}(\underline{y}) \qquad (6) \\ &= (-2)^{-mn} S^{(a,b,c)}_{n} P^{(\frac{a}{c}-1,\, \frac{b}{c}-1,\, \frac{1}{c}-\frac{1}{2})}_{\underline{n}}(1-2\,y_1, 1-2\,y_2, \cdots, 1-2\,y_m) \end{aligned}$$

Pour $u = c$ le résultat de J. Kaneko nécessite la définition des fonctions de Jack, ${}_2F_1^{\alpha}(a, b; c; y_1, \ldots, y_m)$.

Nous retrouvons les résultats d'Aomoto et de Kaneko aux théorèmes 1 et 2 en suivant la méthode, très naturelle et élémentaire dans son principe, introduite par Anderson, [1], pour calculer l'intégrale de Selberg. Ces résultats peuvent aussi être interprétés comme des représentations intégrales des polynômes de Jacobi symétriques, cf. [8]. Nous donnons le résultat de Kaneko seulement pour $u = 1$, nous reviendrons ultérieurement sur un cas plus général. Tous ces résultats sont liés aux conjectures d'Evans, cf. [11] et [2], sur les identités entre sommes de Gauss; nous espérons revenir sur cet aspect.

Notre contribution principale tient dans les propositions 1 à 6 et spécialement les propositions 3 et 4.

Notre démonstration utilise la formule de Rodriguez pour les polynômes de Jacobi, cf. [29], dans le cas de l'intégrale d'Aomoto. Elle utilise les opérateurs de montée $D^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{+,\underline{x}}$, introduits par A. Debiard [7], pour le cas à m variables au lieu du Laplacien utilisé par Kaneko [17]. Ces opérateurs de montée donnent pour les polynômes de Jacobi généralisés symétriques une représentation analogue à la formule de Rodriguez.

Un des points clé de la démonstration est l'identification de la restriction à certains sous-espaces de ces opérateurs de montée avec l'opérateur Φ que

[3] Notre définition de l'intégrale de Kaneko, pour u entier, diffère pour des raisons de commodité de calcul par le signe $(-1)^{nmu}$ de la sienne.

nous introduisons sur les polynômes à m variables. Cet opérateur Φ est une transformée de Mellin formelle sur l'espace des polynômes.

Au paragraphe 4.4.2 nous indiquons comment on peut traiter le cas $\chi_u(\underline{y},\underline{x}) = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(y_j - x_i)^{n_j}$, $n_j \in \mathbb{N}$. Ce cas peut aussi être obtenu par la méthode de J. Kaneko à condition d'exprimer ses opérateurs différentiels en variables symétriques.

En fait la réponse apportée au calcul de l'intégrale (3) par les formules (4) et (6) n'est pas totalement satisfaisante car bien que les coefficients des polynômes de Jacobi généralisés symétriques soient calculables, au moins théoriquement, pour chaque partition $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_p)$, on ne connaît de formule générale que dans des cas très particuliers, [8], [9], [10].

Remerciements: A. Debiard nous a signalé l'article de J. Kaneko et nous a expliqué la théorie des polynômes de Jacobi symétriques et de leurs opérateurs de montée et de descente. L. Habsieger a lu attentivement une première version et nous a permis ainsi de rectifier plusieurs erreurs. Nous remercions les référés qui ont pris la peine de relire avec grand soin le texte et qui nous ont permis grace a leurs remarques de corriger de nombreuses erreurs.

2 Expression en variables symétriques

En suivant la méthode d'Anderson, [1], nous allons donner une expression de $J^{(a,b,c)}_{n,\chi}(\underline{y})$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires en les zéros du polynôme $F(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$.

Cette méthode consiste à exprimer les fonctions symétriques qui apparaissent dans la définition de l'intégrale de Selberg et ses généralisations à l'aide des fonctions symétriques élémentaires et à utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour faire le changement de variables. Le lemme 1 est tiré de [1].

Définition 1 *Soit $\mathcal{P}_n(t)$ l'ensemble des polynômes $F(t) \in \mathbb{R}[t]$, unitaires de degré n, dont toutes les racines sont réelles, distinctes, et comprises entre* 0 *et* 1.

Lemme 1 *Soit $F(t) = F_0 + F_1 t + \cdots + F_{n-1}t^{n-1} + t^n = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$. Soit $\chi(\underline{y}, \underline{x}) = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(y_j - x_i)$. Soit $\Delta(F)$ le discriminant de $F(t)$. Soit $d\underline{F} = dF_0\, dF_1 \cdots dF_{n-1}$. Alors*

$$J^{(a,b,c)}_{n,\chi}(\underline{y}) = \int_{F\in\mathcal{P}_n(t)} \Big(\prod_{j=1}^{m} F(y_j)\Big)|F(0)|^{a-1}|F(1)|^{b-1}|\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}} d\underline{F}$$

□ On a, en effet, un difféomorphisme entre $\{\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [0,1]^n;$ $0 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le 1\}$ et l'ensemble des polynômes $F(t) \in \mathcal{P}_n(t)$, donné par

$$\{\ \underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\,;\ 0 \le x_1 < x_2, \cdots < x_n \le 1\ \} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \left\{ F(t) \in \mathcal{P}_n(t)\,;\ F(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - x_i) \right\}$$

dont le Jacobien vaut $|\,\Delta(F)\,|^{1/2}$ □

3 La méthode d'Anderson, le cas $m = 1$

Pour faciliter la lecture de la démonstration du théorème principal (théorème 2) qui occupe la section suivante, nous allons appliquer tout d'abord la méthode d'Anderson pour retrouver le résultat d'Aomoto [3]:

$$\begin{aligned} A_n^{(a,b,c)}(y) &= \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n}\left(\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\,x_i^{a-1}\,(1-x_i)^{b-1}\right)\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{2c}d\underline{x} \\ &= (-c)^n\,n!\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(a+b+(n+i)c)}\right)S_n^{(a,b,c)}\mathbf{P}_n^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y) \\ &= (-2)^{-n}S_n^{(a,b,c)}P_n^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y) \end{aligned}$$

où les $\mathbf{P}_n^{(\frac{a}{c},\frac{b}{c})}(x)$ sont les polynômes de Jacobi classiques, [29], et les $P_n^{(\frac{a}{c},\frac{b}{c})}(x)$ sont les polynômes de Jacobi unitaires. Le principe général de la méthode suivie dans ce paragraphe, comme dans le suivant, est dû à Anderson [1], la démonstration du théorème 1 est, semble-t-il, nouvelle.

Définition 2 *Soit $\zeta_1<\zeta_2<\cdots<\zeta_{n+1}$ des réels, et soit $Z(t)=\prod_{i=1}^{n+1}(t-\zeta_i)$. On définit $\mathcal{D}_n(Z)$ de la manière suivante:*

$\mathcal{D}_n(Z)$ est l'ensemble des polynômes $P(t)\in\mathbb{R}[t]$, de degré n, dont les racines $(x_1,\cdots,x_n)$ sont enlacées *par la suite $\underline{\zeta}=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots\zeta_{n+1})$. C'est à dire*

$$\zeta_1<x_1<\zeta_2<x_2<\ldots<\zeta_n<x_n<\zeta_{n+1}$$

.

Lemme 2 *Soit $G(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\gamma_i)$ où les $\gamma_i\in\mathbb{R}$ et soit $Z(t)=\prod_{i=1}^{n+1}(t-\zeta_i)$ tels que la suite $(\zeta_i)_{1\le i\le n+1}$ enlace la suite $(\gamma_i)_{1\le i\le n}$, autrement dit $G\in\mathcal{D}_n(Z)$. Alors on peut écrire de manière unique:*

$$G(t)=\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\rho_i}{t-\zeta_i}\right\}Z(t)$$

avec $\left\{\begin{array}{l}\rho_i=\dfrac{G(\zeta_i)}{Z'(\zeta_i)}\\ \rho_i>0;\ 1\le i\le n+1\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\rho_i=1\end{array}\right.$.

□ On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{G(t)}{Z(t)}$, ou de manière équivalente on utilise la formule d'interpolation de Lagrange. □

On veut évaluer l'intégrale

$$\mathcal{I}_n(s_1,\ldots,s_{n+1};y) \quad \stackrel{déf}{=} \quad \int_{G\in\mathcal{D}_n(Z)} G(y)\prod_{i=1}^{n+1}|G(\zeta_i)|^{s_i-1}d\underline{G}$$

où $G(y)=G_0+G_1\,y+G_2\,y^2+\cdots+G_{n-1}\,y^{n-1}+y^n$, $d\underline{G}=dG_0dG_1\cdots dG_{n-1}$

Lemme 3 *Soit*

$$\mathcal{U}_n=\left\{\underline{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};\ (\rho_i>0)_{1\le i\le n+1},\ \sum_{i=1}^{n+1}\rho_i=1\right\}$$

Alors: $\mathcal{D}_n(Z)\simeq\mathcal{U}_n$

□ Ce lemme sera démontré dans le cours de la preuve du lemme 7 □

Lemme 4 *Soit* $\mathcal{U}_n$ *comme au lemme 3, et soit*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n(s_1,\ldots,s_{n+1};y) &\stackrel{déf}{=} \int_{G\in\mathcal{D}_n(Z)} G(y)\prod_{i=1}^{n+1}|G(\zeta_i)|^{s_i-1}d\underline{G}\\ \widetilde{\mathcal{I}}_i(\underline{s})=\widetilde{\mathcal{I}}_i(s_1,\ldots,s_{n+1}) &\stackrel{déf}{=} \int_{\underline{\rho}\in\mathcal{U}_n}\rho_i^{s_i}\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n+1}\rho_j^{s_j-1}d\underline{\rho}\end{aligned}$$

où $s_i\in\mathbb{R}$ *et* $s_i>1$. *Alors:*

$$\mathcal{I}_n(s_1,\ldots,s_{n+1};y) = -\sum_{i=1}^{n+1}\frac{Z(y)}{\zeta_i-y}\Big(\prod_{j=1}^{n+1}|Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\Big)\widetilde{\mathcal{I}}_i(s) \tag{7}$$

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{\mathcal{I}_n(s_1,\ldots,s_{n+1};y)}{y^n} = \left(\prod_{j=1}^{n+1}|Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\right)\frac{\prod_{j=1}^{n+1}\Gamma(s_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^{n+1}s_j)} \tag{8}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_i(\underline{s}) = \frac{s_i\prod_{j=1}^{n+1}\Gamma(s_j)}{\Gamma\Big(1+\sum_{j=1}^{n+1}s_j\Big)} \tag{9}$$

$\square$ Pour la preuve de (7) et de (9) voir les lemmes 7 et 8. Démontrons (8) qui n'est autre qu'un des lemmes d'Anderson, [1]:

$$\begin{aligned}
\lim_{|y|\to\infty} \frac{\mathcal{I}_n(s_1,\ldots,s_{n+1};y)}{y^n} &= \int_{G\in\mathcal{D}_n(Z)} \prod_{i=1}^{n+1} |G(\zeta_i)|^{s_i-1} d\underline{G} \\
&= -\sum_{i=1}^{n+1} \lim_{|y|\to\infty} \frac{Z(y)}{y^n(\zeta_i-y)} \left(\prod_{j=1}^{n+1} |Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\Gamma(1+s_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\Gamma(s_j)}{\Gamma(1+\sum_{j=1}^{n+1} s_j)} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n+1} |Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\prod_{j=1}^{n+1}\Gamma(s_j)}{\Gamma(1+\sum_{j=1}^{n+1} s_j)} \left(\sum_{j=1}^{n+1} s_j\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n+1} |Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\right) \frac{\prod_{j=1}^{n+1}\Gamma(s_j)}{\Gamma(\sum_{j=1}^{n+1} s_j)} \square
\end{aligned}$$

Soit:

$$E_{n+1} \overset{déf}{=} \Big\{(F,G)\in\mathcal{P}_n\times\mathcal{P}_{n+1}\,;\, F(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-\varphi_i)\,,\ G(t)=\prod_{i=1}^{n+1}(t-\gamma_i)\,, \\ 0\leq\gamma_1<\varphi_1<\gamma_2<\ldots<\varphi_n<\gamma_{n+1}\leq 1\Big\}$$

Le lemme suivant est au coeur de la méthode d'Anderson [1], en particulier l'introduction de l'intégrale $I_n^{(a,b,c)}(y)$ et son calcul par deux méthodes différentes. Nous n'avons fait que l'adapter à notre situation.

Lemme 5 *Soit $F,G\in\mathbb{R}[y]$, $F\in\mathcal{P}_n$, $G\in\mathcal{P}_{n+1}$. Soit $R(F,G)$ le résultant de F et G, $R(F,G)| = \prod_{i=1}^{n}|G(\varphi_i)| = \prod_{j=1}^{n+1}|F(\gamma_j)|$, où les $(\gamma_j)_{1\leq j\leq n+1}$ sont les racines de G et les $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ celles de F. Soit $d\underline{F}=dF_0\cdots dF_{n-1}$ et $d\underline{G}=dG_0\cdots dG_n$. Soit*

$$I_n^{(a,b,c)}(y) = \int_{(F,G)\in E_{n+1}} G(y)\cdot|G(0)|^{a-1}\cdot|G(1)|^{b-1}\cdot|R(F,G)|^{c-1} d\underline{F}d\underline{G}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
I_n^{(a,b,c)}(y) &= y(y-1)\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)^n}{\Gamma(1+a+b+nc)} \int_{F\in\mathcal{P}_n} F(y)\times \\
&\quad\times\left\{\frac{a}{y}+\frac{b}{y-1}-c\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\varphi_i-y}\right\} |F(0)|^{a+c-1}\cdot|F(1)|^{b+c-1}\cdot|\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}} d\underline{F}
\end{aligned}$$

$\square$ Intégrons par rapport à G puis par rapport à F. Dans le lemme suivant nous intégrerons dans l'ordre inverse.

Posons pour $(F,G) \in E_{n+1}$, $Z(y) = y(y-1)F(y)$. Les racines de Z enlacent celles de G, autrement dit $(G,Z) \in E_{n+2}$, ou encore $G \in \mathcal{D}_{n+1}(Z)$. Il vient:

$$I_n^{(a,b,c)}(y) = $$
$$= \int_{F\in\mathcal{P}_n} \left\{ \int_{G\in\mathcal{D}_{n+1}(Z)} G(y)\cdot|G(0)|^{a-1}\cdot|G(1)|^{b-1}\prod_{i=1}^{n}|G(\varphi_i)|^{c-1}d\underline{G} \right\} d\underline{F}$$

Notons $(\zeta_i)_{1\le i\le n+2}$ les racines de Z ordonnées de la manière suivante: $\zeta_1 = 0$, $\zeta_i = \varphi_{i-1}$ pour $2 \le i \le n+1$, $\zeta_{n+2} = 1$. Posons aussi $s_1 = a$, $s_i = c$ pour $2 \le i \le n+1$, $s_{n+2} = b$. Alors:

$$\int_{G\in\mathcal{D}_{n+1}(Z)} G(y)\,|G(0)|^{a-1}\,|G(1)|^{b-1}\prod_{i=1}^{n}|G(\varphi_i)|^{c-1}d\underline{G} =$$
$$= \int_{G\in\mathcal{D}_{n+1}(Z)} G(y)\prod_{i=1}^{n+2}|G(\zeta_i)|^{s_i-1}d\underline{G}$$

Il est immédiat que:

$$Z'(0) = -F(0)\,,\quad Z'(1) = F(1)\,,\quad \Big\{Z'(\varphi_j) = \varphi_j(\varphi_j-1)F'(\varphi_j)\Big\}_{1\le j\le n}$$

Donc d'après le lemme 4:

$$\int_{G\in\mathcal{D}_{n+1}(Z)} G(y)\prod_{i=1}^{n+2}|G(\zeta_i)|^{s_i-1}d\underline{G} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n+2}\frac{Z(y)}{\zeta_i - y}\left(\prod_{j=1}^{n+2}|Z'(\zeta_j)|^{s_j-\frac{1}{2}}\right)\frac{s_i\prod_{j=1}^{n+2}\Gamma(s_j)}{\Gamma(1+\sum_{j=1}^{n+2}s_j)}$$

Il suffit alors de revenir aux définitions de Z, des ζ_i et des s_j. $\square$

Lemme 6 *On a:*

$$I_n^{(a,b,c)}(y) = \frac{\Gamma(c)^{n+1}}{\Gamma((n+1)c)}\int_{G\in\mathcal{P}_{n+1}} G(y)\,|G(0)|^{a-1}\,|G(1)|^{b-1}|\Delta(G)|^{c-\frac{1}{2}}d\underline{G}$$

□ On calcule $I_n^{(a,b,c)}(y)$ en intégrant d'abord en F puis en G, puis on utilise la formule 9 du lemme 4. □

Nous pouvons comparer les deux expressions de $I_n^{(a,b,c)}(y)$, le but étant de calculer par récurrence l'intégrale d'Aomoto $A_n^{(a,b,c)}(y)$ et de la comparer à l'intégrale de Selberg $S_n^{(a,b,c)}$.

Soit l'opérateur $D_y^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)} = y^{1-\frac{a}{c}}(1-y)^{1-\frac{b}{c}}\,\dfrac{d}{dy}\,y^{\frac{a}{c}}(1-y)^{\frac{b}{c}}$, c'est la version à une variable de l'opérateur, $D_{+,\underline{y}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, défini dans [7] et rappelé au lemme 13

Proposition 1 *Soit:*

$$\begin{aligned} A_n^{(a,b,c)}(y) &= \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n}\left(\prod_{i=1}^n (y-x_i)\,x_i^{a-1}\,(1-x_i)^{b-1}\right)\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{2c}d\underline{x} \\ &= \int_{F\in\mathcal{P}_n} F(y)\,|F(0)|^{a-1}\,|F(1)|^{b-1}\,|\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}}d\underline{F} \end{aligned}$$

Alors on a la relation de récurrence entre $A_{n+1}^{(a,b,c)}(y)$ et $A_n^{(a+c,b+c,c)}(y)$:

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma((n+1)c)}\,A_{n+1}^{(a,b,c)}(y) = -c\,\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b+nc)}D_y^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}A_n^{(a+c,b+c,c)}(y)$$

□ D'après le lemme 6 on a:

$$\begin{aligned} I_n^{(a,b,c)}(y) &= \frac{\Gamma(c)^{n+1}}{\Gamma((n+1)c)}\int_{G\in\mathcal{P}_{n+1}} G(y)\,|G(0)|^{a-1}|G(1)|^{b-1}|\Delta(G)|^{c-\frac{1}{2}}d\underline{G} \\ &= \frac{\Gamma(c)^{n+1}}{\Gamma((n+1)c)}A_{n+1}^{(a,b,c)}(y) \end{aligned}$$

D'après le lemme 5:

$$\begin{aligned} I_n^{(a,b,c)}(y) &= y(y-1)\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)^n}{\Gamma(1+a+b+nc)}\int_{F\in\mathcal{P}_n} F(y)\,\times \\ &\times\left\{\frac{a}{y}+\frac{b}{y-1}-c\sum_{i=1}^n\frac{1}{\gamma_i-y}\right\}|F(0)|^{a+c-1}\,|F(1)|^{b+c-1}\,|\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}}d\underline{F} \end{aligned}$$

Par définition:

$$\int_{F\in\mathcal{P}_n} F(y)\,|F(0)|^{a+c-1}\,|F(1)|^{b+c-1}\,|\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}}d\underline{F} = A_n^{(a+c,b+c,c)}(y)$$

D'autre part $F(y)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\gamma_i - y} = -\frac{d}{dy}F(y)$. En utilisant l'opérateur $D_y^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}$ on peut alors écrire:

$$\left\{(a(y-1)+by)A_n^{(a+c,b+c,c)}(y) + cy(y-1)\frac{d}{dy}A_n^{(a+c,b+c,c)}(y)\right\} = \\ = -cD_y^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}\left(A_n^{(a+c,b+c,c)}(y)\right)\Box$$

Rappelons la formule de *Rodriguez* pour les polynômes de Jacobi unitaires, après changement de variable $y = \frac{1-x}{2}$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2y) = \frac{2^n}{(\alpha+\beta+n+1)_n}\, y^{-\alpha}(1-y)^{-\beta}\frac{d^n}{dy^n}\left(y^{\alpha+n}(1-y)^{\beta+n}\right)$$

Théorème 1 *L'intégrale d'Aomoto, $A_{n+1}^{(a,b,c)}(y)$, s'exprime à l'aide des polynômes de Jacobi ou de Jacobi unitaires de la facon suivante:*

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(y) \quad = \quad (-2)^{-(n+1)}S_{n+1}^{(a,b,c)}P_{n+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y)$$

$\Box$ En revenant à la définition des opérateurs $D_y^{(\alpha,\beta)} \stackrel{déf}{=} y^{-\alpha}(1-y)^{-\beta}\,\frac{d}{dy}\,y^{\alpha+1}(1-y)^{\beta+1}$, on remarque que:

$$D_y^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}\circ D_y^{(\frac{a}{c},\frac{b}{c})}\circ\cdots\circ D_y^{(\frac{a}{c}+n-2,\frac{b}{c}+n-2)}\circ D_y^{(\frac{a}{c}+n-1,\frac{b}{c}+n-1)} = \\ = y^{1-\frac{a}{c}}(1-y)^{1-\frac{b}{c}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{n+1}\left(y^{n+\frac{a}{c}}(1-y)^{n+\frac{b}{c}}\right)$$

Il est clair que $A_0^{(a+(n+1)c,b+(n+1)c,c)}(y) = 1$, et donc en itérant la proposition 1:

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(y) = \\ (-c)^{n+1}\Big(\prod_{j=0}^{n}\frac{\Gamma((n-j+1)c)\Gamma(a+jc)\Gamma(b+jc)}{\Gamma(c)\Gamma(1+a+b+(n+j)c)}\Big)\times \\ \times y^{1-\frac{a}{c}}(1-y)^{1-\frac{b}{c}}\left(\frac{d}{dy}\right)^{n+1}\left(y^{n+\frac{a}{c}}(1-y)^{n+\frac{b}{c}}\right)$$

En utilisant la relation de contiguité pour la fonction Γ, la formule de Rodriguez et la valeur de l'intégrale de Selberg donnée à la formule (2) il vient:

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(y) \quad = \quad (-2)^{-(n+1}S_{n+1)}^{(a,b,c)}P_{n+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1)}(1-2y)$$

3.0.1 Remarque 1

Ce théorème fournit en fait aussi une démonstration de la formule (2) donnant la valeur de l'intégrale de Selberg (cf. [1]). Ce théorème est le cas à une variable du théorème 2, infra.

On a immediatement le corollaire suivant:

Corollaire 1 *Soit* $e_{n,k}(\underline{x}) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ *la* k*-ième fonction symétrique élémentaire en les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*. Soit, pour* $\ell \in \mathbb{N}$*,* $(x)_\ell = x(x+1)\cdots(x+\ell-1)$*. Alors:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_n^{(a,b,c)}(e_{n,k}) &\overset{déf}{=} \frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n} e_{n,k}(\underline{x})\prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1}\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|^{2c}\,d\underline{x}\\
&= 2^n\binom{n}{k}\frac{\left(\frac{a}{c}+n-k\right)_k\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+n-1\right)_{n-k}}{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+n-1\right)_n}\,S_n^{(a,b,c)}
\end{aligned}$$

4 La méthode d'Anderson, le cas $m \geq 1$

Ce paragraphe est consacré à l'extension à plusieurs variables du résultat précédent.

4.1 Introduction de l'opérateur Φ

La méthode du lemme 7 est imitée d'Anderson [1]. On utilisera dans la suite la convention suivante: si $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ est un multi-indice et si $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un ensemble de variables on posera $\underline{x}^{\underline{s}} = \prod_{i=1}^n x_i^{s_i}$. On notera aussi $\underline{s} - 1 = (s_1 - 1, s_2 - 1, \ldots, s_n - 1)$.

Lemme 7 *Soit* $\underline{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1})$ *une suite strictement croissante de réels. Soit* $s_1, \cdots, s_{n+1}$ *des nombres complexes de parties réelles suffisamment grandes. Soit* $Z(t) = \prod_{i=1}^{n+1}(t-\zeta_i)$*. Soit*

$$\mathcal{U}_n = \left\{\underline{\rho} = (\rho_1, \cdots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n; \rho_i > 0, 1 \le i \le n\,, \sum_{i=1}^n \rho_i < 1\right\}$$

On pose $\rho_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i$ *et on note* $d\underline{\rho} = d\rho_1 \cdots d\rho_n$.

Alors si $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_m)$ *et si* $G(t) = G_0 + G_1\, t \cdots + \; G_{n-1}\, t^{n-1} \; + t^n$

$$J_{n+1}^m(\underline{s}, \underline{y}) \overset{\text{déf}}{=} \int_{G\in\mathcal{D}_n(Z)} \Big(\prod_{j=1}^{m} G(y_j) \Big) \prod_{i=1}^{n+1} |G(\zeta_i)|^{s_i - 1}\, dG_0\, dG_1 \cdots dG_{n-1}$$

$$= \Big(\prod_{j=1}^{m} Z(y_j) \Big) \Big(\prod_{i=1}^{n+1} |Z'(\zeta_i)|^{s_i - \frac{1}{2}} \Big) \int_{\underline{\rho}\in\mathcal{U}_n} \left(\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n+1} \frac{\rho_l}{y_k - \zeta_l} \right) \right) \prod_{l=1}^{n+1} \rho_l^{s_l - 1}\, d\underline{\rho}$$

□ Le passage de la première expression de $J_{n+1}^m(\underline{s}, \underline{y})$ à la deuxième se fait en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange. Posons $Z_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} (t - \zeta_j)$.

On a alors: $G(t) \; = \; \sum_{i=1}^{n+1} \rho_i\, Z_i(t)$ avec $\rho_i = \dfrac{G(\zeta_i)}{Z'(\zeta_i)}$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i \; = \; 1$

La condition $G \in \mathcal{D}_n(Z)$, autrement dit le fait que les racines, γ_1, $\gamma_2, \ldots,$ γ_n de $G(t)$ soient enlacées par celles de $Z(t)$, implique que $\rho_i \; > \; 0$ pour $1 \leq i \leq n + 1$.

La formule d'interpolation de Lagrange donne donc une bijection entre $\mathcal{D}_n(Z)$ et $\mathcal{U}_n = \left\{ \underline{\rho} = (\rho_1, \cdots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n; (\rho_i > 0)_{1\leq i\leq n}\, , \sum_{i=1}^{n} \rho_i < 1 \right\}$.

On considère donc que l'on a n variables indépendantes $(\rho_1, \; \ldots, \; \rho_n)$ et que $\rho_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{n} \rho_i$. En fait cette bijection est un difféomorphisme dont le Jacobien vaut:

$$\left| \frac{D(\rho_1, \cdots, \rho_n)}{D(G_0, \cdots, G_{n-1})} \right| \overset{\text{déf}}{=} \left\| \left| \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial G_j} \right)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 0\leq j\leq n-1}} \right| \right\| = \prod_{i=1}^{n+1} |\, Z'(\zeta_i)\, |^{-\frac{1}{2}} = |\Delta(Z)|^{-\frac{1}{2}}$$

où $\Delta(Z)$ est le discriminant du polynôme Z. On en déduit le résultat. □

On introduit un opérateur Φ très lié à la transformation de Mellin, cf. [21].

Définition 3 *Soit* Φ *l'application* $\mathbb{R}$*-linéaire de* $\mathbb{R}\,[s_1, s_2, \cdots, s_{n+1}]$ *dans lui même définie de la manière suivante. Soit* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$*. On pose* $(s)_a = s(s+1) \cdots (s+a-1)$*, et* $(s)_0 = 1$*. On définit alors:*

$$\Phi \left(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_{n+1}^{a_{n+1}} \right) = (s_1)_{a_1}\, (s_2)_{a_2}\, \cdots (s_{n+1})_{a_{n+1}}$$

Lemme 8 *Soient* $i_1,\ldots,i_m \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ *(non nécessairement distincts) et soient* $s_1,\ldots,s_{n+1}$ *des réels positifs. Soit:*

$$A_{i_1,\ldots,i_m} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\underline{\rho}\in\mathcal{U}_n} \rho_{i_1}\rho_{i_2}\cdots\rho_{i_m}\left(\prod_{\ell=1}^{n+1}\rho_\ell^{s_\ell-1}\right)d\underline{\rho}$$

Alors :

$$A_{i_1,\ldots,i_m} = \frac{\prod_{i=1}^{n+1}\Gamma(s_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n+1}s_i+m)}\,\Phi\Big(\prod_{j=1}^{m}s_{i_j}\Big) \tag{10}$$

□ Considérons le difféomorphisme de $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}_n$ sur $[0,\infty]^{n+1}$ défini par

$$(\lambda,\rho_1,\ldots,\rho_n)\longrightarrow(\lambda\rho_1,\lambda\rho_2,\ldots,\lambda\rho_n,\lambda\rho_{n+1})$$
$$\text{avec}\quad \sum_{i=1}^{n+1}\rho_i=1\quad\text{et}\quad\rho_i>0\text{ pour }1\le i\le n+1$$

L'application réciproque qui va de $[0,\infty]^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}_n$ est donnée par

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\longrightarrow\Big(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\ ,\ \frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}\ ,\ \frac{x_2}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}\ ,\ \cdots\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}\Big)$$

et le Jacobien de la transformation est $\left|\dfrac{D(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})}{D(\lambda,\rho_1,\ldots,\rho_n)}\right| = \lambda^n$. En utilisant ce changement de variable il vient:

$$\begin{aligned}
&A_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{n+1}s_i+m\Big)=\\
&\quad=\int_{\underline{\rho}\in\mathcal{U}_n}\rho_{i_1}\ldots\rho_{i_m}\underline{\rho}^{\underline{s}-1}d\underline{\rho}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda}\lambda^{\left(\sum_{i=1}^{n+1}s_i+m-1\right)}d\lambda\\
&\quad=\int_{\underline{x}\in[0,\infty]^{n+1}}e^{\left(-\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)}\,x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\,\underline{x}^{\underline{s}-1}\,d\underline{x}
\end{aligned}$$

Pour chaque $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ notons $a_i=\#\{j;1\le j\le m\,,\ i_j=i\}$:

$$\begin{aligned}
A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\Gamma\Big(\sum_{i=1}^{n+1}s_i+m\Big) &= \prod_{i=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}e^{-x_i}x_i^{s_i+a_i-1}dx_i\\
&=\left(\prod_{i=1}^{n+1}\Gamma(s_i)\right)\Phi\Big(\prod_{i=1}^{n+1}s_i^{a_i}\Big)\Box
\end{aligned}$$

Proposition 2

$$J_{n+1}^m(\underline{s},\underline{y}) = \Big(\prod_{j=1}^m Z(y_j)\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n+1} |Z'(\zeta_i)|^{s_i-\frac{1}{2}}\Big)\frac{\prod_{i=1}^{n+1}\Gamma(s_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n+1} s_i + m)}\times$$
$$\times \sum_{1\le i_1,\dots,i_m\le n+1}\Big(\prod_{j=1}^m \frac{1}{y_j-\zeta_{i_j}}\Big)\Phi\Big(\prod_{j=1}^m s_{i_j}\Big)$$

□ C'est une conséquence immédiate des lemmes 7 et 8. □ différentiel

4.2 Expression de l'opérateur Φ à l'aide d'un opérateur différentiel

Soit $S_m = S = \{1,2,\dots,m\}$ et soit y_1, y_2, …, y_m, y_{m+1} des variables. Si $j \in S$ on notera $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$.

Si $T \subset S_m$ on notera:

$$T' = T\cup\{m+1\}\,,\ V_T = \prod_{\substack{i,j\in T\\ i<j}} (y_i - y_j)\,,\ \partial^{(T)} = \prod_{j\in T}\partial_j\,,\quad D_T = \frac{1}{V_T}\partial^{(T)}V_T$$

V_T est le Vandermonde des variables $(y_j)_{j\in T}$. Si $T=\emptyset$ on utilise la convention standard: soit $\mathbf{I}$ l'application identique de $\mathcal{C}^m$, on pose $D_\emptyset = \mathbf{I}$ et $V_\emptyset = 1$.

Proposition 3 *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ en les variables y_1, y_2, …, y_m alors:*

$$D_S(fg) = \sum_{T\subset S} D_T(f)\cdot D_{S-T}(g)$$

□ La démonstration se fait laborieusement par récurrence sur m, cf [5]. □
Soit s_1, s_2, …,s_n des réels, avec les notations précédentes posons:

$$f_n(y_j) = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{y_j-\zeta_i} \quad ; \quad \mathcal{F}_n(\underline{y}) = \prod_{j=1}^m f_n(y_j)$$
$$g_n(y_j) = \prod_{i=1}^n (y_j-\zeta_i)^{s_i} \quad ; \quad \mathcal{G}_n(\underline{y}) = \prod_{j=1}^m g_n(y_j)$$

Lemme 9 $\dfrac{1}{\mathcal{G}_n(\underline{y})} D_S(\mathcal{G}_n(\underline{y}))$ *est un polynôme en* $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *à coefficients dans* $\mathbb{Z}(\underline{y} - \underline{\zeta})$*, où* $\underline{y} - \underline{\zeta} = \left\{ (y_j - \zeta_i)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \right\}$.

□ En effet $\dfrac{1}{V(\underline{y})\mathcal{G}(\underline{y})} \dfrac{\partial^m}{\partial y_1 \partial y_2 \cdots \partial y_m} V(\underline{y})\mathcal{G}(\underline{y})$ est une dérivée logarithmique par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ et donc les exposants des $y_j - \zeta_i$ apparaissent polynomialement. □

La proposition suivante est fondamentale.

Proposition 4 *On a:* $\dfrac{1}{\mathcal{G}_n(\underline{y})} D_S(\mathcal{G}_n(\underline{y})) = \Phi(\mathcal{F}_n(\underline{y}))$

□ On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$ écrivons $\zeta = \zeta_1$ et $s = s_1$. Il nous faut démontrer:

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{m} (y_j - \zeta)^{s-1}} D_S\Big(\prod_{j=1}^{m} (y_j - \zeta)^s \Big) = (s)_m \tag{11}$$

Il est clair que le membre de gauche est un polynôme en s unitaire de degré m. Il suffit donc de montrer que pour, $s = 0$, $s = 1$, $\ldots$, $s = m - 1$ on a $\partial^{(S)}\Big(V_S \prod_{j \in S} (y_j - \zeta)^{-s} \Big) = 0$. Or $V_S \prod_{j \in S} (y_j - \zeta)^{-s}$ est égal au déterminant de la matrice carrée d'ordre m, $A = A(s) = \Big(A_{i,j} \Big)_{1 \le i,j \le m}$, où $A_{i,j} = \dfrac{y_j^{i-1}}{(y_j - \zeta)^s}$.

On obtient $\partial^{(S)}(\|A\|)$ en dérivant chacune des lignes de A par rapport à la variable y_j correspondante, $\partial^{(S)}(\|A\|)$ est donc égal au déterminant de la matrice $B(s) = \dfrac{-1}{\prod_{j \in S} (y_j - \zeta)^{s+1}} \times C$ où C est la matrice $C = \Big(C_{i,j} \Big)_{1 \le i,j \le m}$ avec $C_{i,j} = (s - i + 1) y_j^{i-1} + (i - 1)\, \zeta\, y_j^{i-2}$. Notons $\vec{C}_\ell$ la ℓ-ième ligne de C. Pour $s = 0, 1, \ldots, m - 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \binom{s}{k} \vec{C}_{s-k+1} \zeta^k = \vec{0}$, et donc $\|B(s)\| = 0$, pour $s = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Supposons maintenant la propriété vraie à l'ordre $n - 1$. Posons $S = \{1, 2, \ldots, m\}$

On peut écrire:

$$\mathcal{F}_n(\underline{y}) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k s_n^k \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \sum_{\substack{T \subset S \\ |T| = k}} \frac{\mathcal{F}_{n-1}(\underline{y})}{\prod_{j \in T} (y_j - \zeta_n) f_{n-1}(y_j)}$$

D'après l'hypothèse de récurrence:

$$\Phi\left(\frac{\mathcal{F}_{n-1}(\underline{y})}{\prod_{j\in T} f_{n-1}(y_j)}\right) = \frac{1}{\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})} D_{S-T}(\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y}))$$

de sorte que

$$\Phi(\mathcal{F}_n(\underline{y})) = \textstyle\sum_{k=0}^{m} \beta_k \cdot (s_n)_k$$

$$\text{avec} \quad \beta_k = \frac{1}{\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})} \sum_{\substack{T\subset S\\ |T|=k}} \frac{1}{\prod_{i\in T}(y_i - \zeta_n)} D_{S-T}(\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y}))$$

et donc

$$\Phi(\mathcal{F}_n(y)) = \frac{1}{\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})} \sum_{T\subset S} \frac{(s_n)_{|T|}}{\prod_{j\in T}(y_j - \zeta_n)} D_{S-T}(\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})) \tag{12}$$

D'autre part d'après la proposition 3 et la formule (11)

$$\begin{aligned}
D_S(\mathcal{G}_n(\underline{y})) &= D_S\Big(\prod_{j=1}^{m}(y_j - \zeta_n)^{s_n} \mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})\Big) \\
&= \sum_{T\subset S} D_T\Big(\prod_{j=1}^{m}(y_j - \zeta_n)^{s_n}\Big) \cdot D_{S-T}\Big(\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})\Big) \\
&= \sum_{T\subset S} \left(\prod_{j\in S}(y_j - \zeta_n)^{s_n}\right) \frac{(s_n)_{|T|}}{\prod_{j\in T}(y_j - \zeta_n)} D_{S-T}\Big(\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y})\Big)
\end{aligned}$$

D'après la formule (12) on a $D_S\Big(\mathcal{G}_n(\underline{y})\Big) = \Phi(\mathcal{F}_n(y)) \cdot \mathcal{G}_{n-1}(\underline{y}) \prod_{j\in S}(y_j - \zeta_n)^{s_n}$ et $\mathcal{G}_{n-1}(\underline{y}) \prod_{j\in S}(y_j - \zeta_n)^{s_n} = \mathcal{G}_n(\underline{y})$. La proposition est démontrée $\square$

4.3 Récurrence entre $A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y})$ et $A_n^{(a+c,b+c,c)}(\underline{y})$

Rappelons que l'on a pose, cf. la formule (5) et (6):

$$A_n^{(a,b,c)}(\underline{y}) \overset{déf}{=} \frac{1}{n!} \int_{[0,1]^n} \Big(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(y_j - x_i)\Big) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j|^{2c} \, d\underline{x}$$

Soit $\mathcal{P}_n = \left\{ F(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \varphi_i) \in \mathbb{R}[t];\ \varphi_i \in \mathbb{R}\,;\ 0 \leq \varphi_i \leq 1,\ 1 \leq i \leq n \right\}$. Soit:

$$E_{n+1} = \Big\{ (F, G) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_{n+1}\,;\ F(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \varphi_i)\,,\ G(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - \gamma_i)\,; \\ 0 \leq \gamma_1 < \varphi_1 < \gamma_2 < \ldots < \varphi_n < \gamma_{n+1} \leq 1 \Big\}$$

Si $G(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - \gamma_i) \in \mathcal{P}_{n+1}$, notons:

$$\mathcal{D}_n(G) = \Big\{ F \in \mathcal{P}_n;\ F(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \varphi_i);\ \gamma_1 < \varphi_1 < \gamma_2 < \ldots < \varphi_n < \gamma_{n+1} \Big\}$$

Posons, si $F \in \mathcal{P}_n$, $F(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} F_i\, t^i$ et $d\underline{F} = \prod_{i=0}^{n-1} dF_i$.

Lemme 10 *Posons pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$:*

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y}) \stackrel{déf}{=} \int_{(F,G)\in E_{n+1}} \Big(\prod_{j=1}^{m} G(y_j) \Big) |G(0)|^{a-1} |G(1)|^{b-1} |R(F, G)|^{c-1} d\underline{F} d\underline{G}$$

Alors:

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = \frac{\Gamma(c)^{(n+1)}}{\Gamma((n+1)c)}\, A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y})$$

□ Soit $F(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \varphi_i) \in \mathcal{P}_n$. Soit $Z(t) = t(t-1)F(t)$ et soit:

$$\mathcal{D}_{n+1}(Z) = \Big\{ G \in \mathcal{P}_{n+1}\,;\ G(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - \gamma_i)\,, \\ \text{avec } 0 \leq \gamma_1 < \varphi_1 < \gamma_2 < \ldots < \varphi_n < \gamma_{n+1} \leq 1 \Big\}$$

Intégrons $I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y})$ d'abord en $F \in \mathcal{P}_n$ puis en $G \in \mathcal{P}_{n+1}$:

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = \\ = \int_{G\in\mathcal{P}_{n+1}} \int_{F\in\mathcal{D}_n(G)} \Big(\prod_{j=1}^{m} G(y_j) \Big) |G(0)|^{a-1} |G(1)|^{b-1} \prod_{i=1}^{n+1} |F(\gamma_i)|^{c-1}\, d\underline{F} d\underline{G}$$

Appliquons le lemme 7, avec $m=0$, c'est à dire avec $\prod_{j=1}^m G(y_j)=1$. Soit $G'=\dfrac{d}{dt}G$:

$$\int_{F\in\mathcal{D}_n(G)}\prod_{i=1}^{n+1}|F(\gamma_i)|^{c-1}d\underline{F}=\prod_{i=1}^{n+1}|G'(\gamma_i)|^{c-1/2}\int_{\lambda\in\mathcal{U}_n}\prod_{\ell=1}^{n+1}\lambda_\ell^{c-1}d\lambda$$

D'après le lemme 8 avec $m=0$: $\displaystyle\int_{\lambda\in\mathcal{U}_n}\prod_{\ell=1}^{n+1}\lambda_\ell^{c-1}d\lambda=\frac{\Gamma(c)^{n+1}}{\Gamma((n+1)c)}$. Donc:

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y})=$$
$$=\frac{\Gamma(c)^{n+1}}{\Gamma((n+1)c)}\int_{G\in\mathcal{P}_{n+1}}\left(\prod_{j=1}^m G(y_j)\right)|G(0)|^{a-1}|G(1)|^{b-1}|\Delta(G)|^{c-1/2}\,d\underline{G}$$

D'où le résultat. □

Lemme 11 *Soit $F(t)\in\mathcal{P}_n$ et $Z(t)=t(t-1)F(t)$. Notons $\underline{\zeta}=(\zeta_1,\ldots,\zeta_{n+2})$ les zéros de $Z(t)$, avec $\zeta_1=0<\zeta_2<\ldots<\zeta_{n+1}<\zeta_{n+2}=1$. Soit $\underline{s}=(s_1,s_2,\ldots,s_{n+1},s_{n+2})$, soit $\mathcal{F}(\underline{y},\underline{\zeta},\underline{s})=\displaystyle\prod_{j=1}^m\Big(\sum_{\ell=1}^{n+2}\frac{s_\ell}{y_j-\zeta_\ell}\Big)$. Posons si $s_1=a$, $s_2=s_3=\ldots=s_{n+1}=c$, $s_{n+2}=b$*

$$\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y},\underline{\zeta})=\Phi(\,\mathcal{F}(\underline{y},\underline{\zeta},\underline{s}\,))\Big|_{\substack{s_1=a\\ s_2=\ldots=s_{n+1}=c\\ s_{n+2}=b}}$$

Alors:

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y})=$$
$$=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)^n}{\Gamma(m+a+b+nc)}\int_{F\in\mathcal{P}_n}|F(0)|^{a+c-1}\cdot|F(1)|^{b+c-1}\cdot|\Delta(F)|^{c-1/2}\times$$
$$\times\left(\prod_{j=1}^m(y_j(1-y_j)F(y_j)\right)\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y},\underline{\zeta})d\underline{F}$$

□ Intégrons d'abord en G puis en F dans la définition de $I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y})$. Il vient:

$$I_{m,n}^{(a,b,c)}(\underline{y})=$$
$$=\int_{F\in\mathcal{P}_n}\int_{G\in\mathcal{D}_{n+1}(Z)}\left(\prod_{j=1}^m G(y_j)\right)|G(0)|^{a-1}|G(1)|^{b-1}|R(F,G)|^{c-1}d\underline{F}d\underline{G}$$

Notons $\varphi_1 = \zeta_2, \ldots, \varphi_n = \zeta_{n+1}$ les zéros de F.

On a $Z'(\zeta_{i+1}) = \varphi_i(\varphi_i - 1)F'(\varphi_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. De même on a $Z'(0) = -F(0)$ et $Z'(1) = F(1)$, d'où $\left|\prod_{i=2}^{n+1} Z'(\zeta_i)\right| = |F(0)|\,|F(1)|\,|\Delta(F)|$. On applique la proposition 2 et le lemme 8. $\square$

Lorsqu'il sera nécessaire de préciser les variables on notera $\partial_{\underline{y}}^{(T)}$ au lieu de $\partial^{(T)}$. On notera egalement $V(\underline{y})$ au lieu de $V_S(\underline{y})$ le Vandermonde en les variables $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_m)$. Si $U \subset S$, $|U|$ est le cardinal de U.

On montre facilement le lemme suivant.

Lemme 12 *Soit* $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}$ *l'opérateur différentiel sur* $\mathbb{R}[\underline{y}] = \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_m]$ *défini de la manière suivante:*

$$\mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}\Big(\Psi(\underline{y})\Big) =$$
$$= \frac{1}{\Psi(\underline{y})^{c-1}} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{y_j^{a-1}(y_j-1)^{b-1}} \cdot D_S\Big(\Big(\prod_{j=1}^{m} y_j^a(y_j-1)^b\Big)\Psi(\underline{y})^c\Big)$$

Soit $P(\underline{y}) = V(\underline{y})\prod_{j=1}^{m} y_j^{a-1}(y_j-1)^{b-1}$, $Q(\underline{y}) = V(\underline{y})\prod_{j=1}^{m} y_j^a(y_j-1)^b$ *et soit* $\eta_T(\underline{y}) = \dfrac{c^{|S-T|}}{P(\underline{y})}\partial^{(T)}\Big(Q(\underline{y})\Big)$.

Si $\Psi(\underline{y}) = \psi_1(y_1)\psi_2(y_2)\cdots\psi_m(y_m)$ *où* $\psi_i(y_i) \in \mathbb{R}[y_i]$, *alors*

$$\mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}\Big(\Psi(\underline{y})\Big) = \sum_{T\subset S} \eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}\Big(\Psi(\underline{y})\Big)$$

Remarquons que les $\eta_T(\underline{y})$ ne dépendent pas de Ψ.

Ce lemme montre que la restriction de l'opérateur non linéaire $\mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}$ aux polynômes qui sont des produits de polynômes à une variable coïncide avec un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(y_1, \ldots, y_m)$.

Proposition 5 *On a:*

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma((n+1)c)}{\Gamma(m+a+b+nc)\Gamma(c)} \sum_{T\subset S} \eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}\Big(A_n^{(a+c,b+c,c)}(\underline{y})\Big)$$

$\square$ Soit F un polynôme à une variable $F \in \mathbb{R}[y]$, de degré n. Soit $Z(t) = y(y-1)F(y)$ et soient $\zeta_1 = 0, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2} = 1$ les racines de $Z(y)$, donc $\prod_{i=1}^{n+2}(y-\zeta_i) = y(y-1)F(y)$. Posons: $h(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \frac{s_i}{y-\zeta_i}$ et $\mathcal{F}(\underline{y}, \underline{\zeta}, \underline{s}) = \prod_{j=1}^{m} h(y_j)$. Montrons alors que:

$$\left(\prod_{j=1}^{m} y_j(y_j-1)F(y_j)\right)\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y}, \underline{\zeta}) = \mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}\left(\prod_{j=1}^{m} F(y_j)\right) \tag{13}$$

où $\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y}, \underline{\zeta})$ a été défini au lemme 11. On a vu en effet à la proposition 4 que:

$$\Phi(\mathcal{F}(\underline{y}, \underline{\zeta}, \underline{s})) = \frac{1}{V(\underline{y})}\prod_{i=1}^{n+2}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(y_j-\zeta_i)^{s_i}}\partial^{(S)}\left(V(\underline{y})\prod_{i=1}^{n+2}\prod_{j=1}^{m}(y_j-\zeta_i)^{s_i}\right)$$

Comme $s_1 = a$, $s_2 = s_3 = \ldots = s_{n+1} = c$, $s_{n+2} = b$, il vient:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y}, \underline{\zeta}) &= \\ &= \frac{1}{V(\underline{y})}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{y_j^a(y_j-1)^b F(y_j)^c}\right)\partial_{\underline{y}}^{(S)}\left(V(\underline{y})\prod_{j=1}^{m} y_j^a(y_j-1)^b F(y_j)^c\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat (13).

On a alors:

$$\begin{aligned}\int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2}\left(\prod_{j=1}^{m} y_j(y_j-1)F(y_j)\right)\times \\ \times\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y}, \underline{\zeta})d\underline{F} = \\ = \sum_{T\subset S}\eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}(A_n^{(a+c,b+c,c)}(\underline{y}))\end{aligned} \tag{14}$$

En effet d'après la formule (13), on a:

$$\begin{aligned}\int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2}\left(\prod_{j=1}^{m} y_j(y_j-1)F(y_j)\right)\times \\ \times\mathcal{H}^{(a,b,c)}(\underline{y}, \underline{\zeta})d\underline{F} =\end{aligned}$$

$$= \int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2} \times$$
$$\times \mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}\Big(\prod_{j=1}^m F(y_j)\Big)d\underline{F}$$

D'après le lemme 12 on a:

$$\int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2}\times$$
$$\times \mathfrak{D}_{\underline{y}}^{(a,b,c)}\Big(\prod_{j=1}^m F(y_j)\Big)d\underline{F}$$
$$=\int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2} \times$$
$$\times\left\{\sum_{T\subset S}\eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}\Big(\prod_{j=1}^m F(y_j)\Big)\right\}d\underline{F}$$
$$=\sum_{T\subset S}\eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}\left(\int_{F\in\mathcal{P}_n} |F(0)|^{a+c-1}|F(1)|^{b+c-1}|\Delta(F)|^{c-1/2}\prod_{j=1}^m F(y_j)d\underline{F}\right)$$

Par définition le dernier membre est égal à:

$$\sum_{T\subset S}\eta_{S-T}(\underline{y})\partial^{(T)}\Big(A_n^{(a+c,b+c,c)}(\underline{y})\Big)$$

Les lemmes 10 et 11 et la formule (14) entraînent le résultat. □

En utilisant les notations de [7] on obtient le lemme suivant:

Lemme 13 *Soit* $f(\underline{y}) = 2^m\prod_{i=1}^m y_i$, $g(\underline{y}) = (-2)^m\prod_{i=1}^m (y_i-1)$. *Soit, pour* $S = S_m = \{1,2,\ldots,m\}$ *(cf. [7])*

$$D_{-,\underline{y}}^{\gamma} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{V_S(\underline{y})}\sum_{k=0}^m(\gamma+\frac{1}{2})^k\sum_{\substack{|T|=k\\T\subset S}}\Big(\partial_{\underline{y}}^{(T)}V_S(\underline{y})\Big)\partial_{\underline{y}}^{(S-T)}$$
$$D_{+,\underline{y}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{f^\alpha g^\beta}\circ D_{-,\underline{y}}^{\gamma}\circ f^{\alpha+1}g^{\beta+1}$$

Il existe alors des fonctions rationnelles $\rho_{U}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y})$ définies pour $U \subset S_m$ telles que:

$$D_{+,\underline{y}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \sum_{U\subset S} \rho_{U}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y})\partial_{\underline{y}}^{(U)}$$

En posant $\delta = \gamma + \frac{1}{2}$, on a:

$$\begin{aligned} \rho_{U}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y}) &= \frac{(-4)^m}{V_S(\underline{y})\prod_{i=1}^m y_i^\alpha (y_i-1)^\beta} \times \\ &\times \sum_{T\subset S-U} \delta^{|T|}\Big(\partial_{\underline{y}}^{(T)} V_S(\underline{y})\Big)\cdot\Big(\partial_{\underline{y}}^{(S-T-U)}\prod_{i=1}^m y_i^{\alpha+1}(y_i-1)^{\beta+1}\Big) \end{aligned}$$

de plus $V_S(\underline{y})\rho_{U}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y})$ est un polynôme antisymétrique en les y_i.

□ Voir [7] chapitre II, pour les définitions et les propriétés des opérateurs $D_{-,\underline{y}}^{\gamma}$ et $D_{+,\underline{y}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. La démonstration du lemme est élémentaire en remarquant que l'on a la relation suivante: $D_{-,\underline{y}}^{\gamma} = (-2)^m D_{-,\underline{x}}^{\gamma}$. □

Posons:

$$\alpha = \frac{a}{c} - 1,\ \beta = \frac{b}{c} - 1,\ \text{et } \gamma = \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \delta = \frac{1}{c} \tag{15}$$

Lemme 14 *Si $W \subset S$ et si (α,β,γ) sont reliées à (a,b,c) par les formules* (15) *on a:*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\prod_{i=1}^m y_i^\alpha (y_i-1)^\beta}\partial_{\underline{y}}^{(W)}\Big(\prod_{i=1}^m y_i^{\alpha+1}(y_i-1)^{\beta+1}\Big) = \\ &\qquad = c^{-|W|}\frac{1}{\prod_{i=1}^m y_i^{a-1}(y_i-1)^{b-1}}\partial_{\underline{y}}^{(W)}\Big(\prod_{i=1}^m y_i^{a}(y_i-1)^{b}\Big) \end{aligned}$$

□ En effet:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\prod_{i=1}^m y_i^\alpha (y_i-1)^\beta}\partial_{\underline{y}}^{(W)}\Big(\prod_{i=1}^m y_i^{\alpha+1}(y_i-1)^{\beta+1}\Big) = \\ &\qquad = \prod_{i\in W}\Big((\alpha+1)y_i + (\beta+1)(y_i-1)\Big) \\ &\qquad = c^{-|W|}\frac{1}{\prod_{i=1}^m y_i^{a-1}(y_i-1)^{b-1}}\partial_{\underline{y}}^{(W)}\Big(\prod_{i=1}^m y_i^{a}(y_i-1)^{b}\Big) \square \end{aligned}$$

Rappelons que si $U \subset S$, alors:

$$\eta_U(\underline{y}) = \eta_U^{(a,b,c)}(\underline{y}) = \frac{c^{|S-U|}}{V_S(\underline{y}) \prod_{i=1}^m y_i^{a-1}(y_i-1)^{b-1}} \partial_{\underline{y}}^{(U)} \Big(\prod_{i=1}^m y_i^a (y_i-1)^b \, V_S(\underline{y}) \Big)$$

Lemme 15 *Soit* $\rho_U^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(\underline{y})$ *défini au* lemme 13 *et* $\eta_U^{(a,b,c)}(\underline{y})$ *défini au* lemme 12, *alors:*

$$\rho_U^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(\underline{y}) = \left(-\frac{4}{c}\right)^{|S|} \eta_{S-U}^{(a,b,c)}(\underline{y})$$

□ D'après le lemme 14, avec $\delta = \frac{1}{c}$, $|S| = m$ et α, β, γ comme à la formule (15):

$$\begin{aligned}
\rho_U^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y}) &\overset{déf}{=} \frac{(-4)^m}{V_S(\underline{y}) \prod_{i=1}^m y_i^{\alpha}(y_i-1)^{\beta}} \sum_{T \subset S-U} \delta^{|T|} \Big(\partial_{\underline{y}}^{(T)} V_S(\underline{y}) \Big) \times \\
&\qquad \times \Big(\partial_{\underline{y}}^{(S-T-U)} \prod_{i=1}^m y_i^{\alpha+1}(y_i-1)^{\beta+1} \Big) \\
&= \frac{(-4)^m}{V_S(\underline{y}) \prod_{i=1}^m y_i^{a-1}(y_i-1)^{b-1}} \sum_{T \subset S-U} \delta^{|T|} c^{-|S-T-U|} \Big(\partial_{\underline{y}}^{(T)} V_S(\underline{y}) \Big) \times \\
&\qquad \times \Big(\partial_{\underline{y}}^{(S-T-U)} \prod_{i=1}^m y_i^{a}(y_i-1)^{b} \Big) \\
&= \left(-\frac{4}{c}\right)^m \frac{c^{|U|}}{V_S(\underline{y}) \prod_{i=1}^m y_i^{a-1}(y_i-1)^{b-1}} \partial_{\underline{y}}^{(S-U)} \Big(\prod_{i=1}^m y_i^a (y_i-1)^b V_S(\underline{y}) \Big) \\
&= \left(-\frac{4}{c}\right)^m \eta_{S-U}^{(a,b,c)}(\underline{y}) \square
\end{aligned}$$

Proposition 6 *Avec les notations ci-dessus on a:*

$$\begin{aligned}
&A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = \\
&\quad = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma((n+1)c)}{\Gamma(m+a+b+nc)\,\Gamma(c)} \left(-\frac{c}{4}\right)^m D_{+,\underline{y}}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})} \Big(A_n^{(a+c,b+c,c)}(\underline{y}) \Big)
\end{aligned}$$

□ On applique la proposition 5 et les lemmes 13 et 15 □

4.4 Expression de $A_n^{(a,b,c)}(\underline{y})$ à l'aide des polynômes de Jacobi généralisés.

Lemme 16 *Soit* $\alpha = \dfrac{a}{c} - 1$, $\beta = \dfrac{b}{c} - 1$, $\gamma = \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{2}$. *Soit* $f(\underline{y}) = 2^m \prod_{i=1}^m y_i$, $g(\underline{y}) = (-2)^m \prod_{i=1}^m (y_i - 1)$ *et soit, pour* $S = \{1, 2, \ldots, m\}$, $D^{\gamma}_{-,\underline{y}}$ *et* $D^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{+,\underline{y}}$ *comme au lemme 13. Alors:*

$$\begin{aligned} &A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = A_{n+1}^{(a,b,c)}(y_1, \ldots, y_m) = \\ &= \left\{ \prod_{j=0}^{n} \Big(-\frac{c}{4} \Big)^m \frac{\Gamma(a+jc)\Gamma(b+jc)\Gamma((n+1-j)c)}{\Gamma(m+a+b+(n+j)c)\Gamma(c)} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ D^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{+,\underline{y}} \circ D^{(\alpha+1,\beta+1,\gamma)}_{+,\underline{y}} \circ \cdots \circ D^{(\alpha+n,\beta+n,\gamma)}_{+,\underline{y}} \right\} \Big(A_0^{(a+(n+1)c,b+(n+1)c,c)}(\underline{y}) \Big) \end{aligned}$$

□ Il suffit d'itérer la proposition 6. □

Soit $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_p)$ une partition, avec $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_p$. Soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p)$. Posons $P_{\underline{r}}(\underline{x}) = \sum'_{\sigma \in \mathfrak{D}_p} x_1^{r_{\sigma(1)}} x_2^{r_{\sigma(2)}} \cdots x_p^{r_{\sigma(p)}}$, où $\sum'$ désigne une sommation sur les $\sigma \in \mathfrak{D}_p$ qui induisent des permutations distinctes sur la partition $\underline{r}$.

Soit $P(\underline{x})$ un polynôme symétrique en les variables $(x_1, \ldots, x_p)$, cf. [23]. On sait qu'il existe une unique partition $\underline{n}$, appelée le *degré symétrique de* P, telle que $P(\underline{x}) = \sum_{\underline{r} \leq \underline{n}} c_{\underline{r}} P_{\underline{r}}(\underline{x})$ où la somme porte sur toutes les partitions, $\underline{r}$, plus petites que la partition $\underline{n}$ pour l'ordre lexicographique naturel sur les partitions, cf. [23].

Le terme $P_{\underline{n}}(\underline{x})$ dans la décomposition précédente de $P(\underline{x})$ s'appelle le *symbole principal*, c'est à dire le terme de plus haut degré pour l'ordre lexicographique mis sur les partitions.

Soit

$$\mathcal{X}(\underline{x}) = \left\{ \begin{array}{lclcl} e_1(\underline{x}) & = & e_1(x_1, \ldots, x_p) & = & (-1) \sum_{i=1}^p x_i \\ e_2(\underline{x}) & = & e_2(x_1, \ldots, x_p) & = & \sum_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_p(\underline{x}) & = & e_p(x_1, \ldots, x_p) & = & (-1)^p \prod_{i=1}^p x_i \end{array} \right.$$

les fonctions symétriques élémentaires en les variables $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_p)$. On sait, [23], que tout polynôme symétrique $P(\underline{x}) = P(x_1, \ldots, x_p)$ peut s'écrire de manière unique comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires que l'on appelle les *variables symétriques*. De plus on a $P_{\underline{r}}(\underline{x}) = e_1^{r_1-r_2} e_2^{r_2-r_3} \cdots e_{p-1}^{r_{p-1}-r_p} e_p^{r_p}$.

Soit $\underline{n} = (n, n, \ldots, n) = n^m$ la partition composée de m parts égales à n. Soit $\underline{n} - \underline{1} = (n-1, n-1, \ldots, n-1) = \{n-1\}^m$. Rappelons tout d'abord la définition de l'élément de volume invariant, $dV_{\underline{x}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$, en coordonnées algébriques attaché au système de racines de type BC_p avec multiplicité (α, β, γ) (cf. [7] Chapitre 1):

$$dV_{\underline{x}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \prod_{i=1}^{p} (1-x_i)^{\alpha} (1+x_i)^{\beta} \prod_{1 \le i < j \le p} (x_i - x_j)^{2\gamma+1} \prod_{i=1}^{p} dx_i \tag{16}$$

On rappelle maintenant la définition des *polynomes de Jacobi généralisés* à m variables introduits par Debiard [7].

Définition 4 *Le polynôme de Jacobi symétrique $P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x}) = P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{e})$ associé à la partition $\underline{n} = (n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_p)$ est l'unique polynôme tel que:*

1. *son symbole principal est en variables symétriques $(e_1, \ldots, e_p)$:*

$$\widetilde{\Pi}_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{e}) = e_1^{n_1-n_2} e_2^{n_2-n_3} \cdots e_{p-1}^{n_{p-1}-n_p} e_p^{n_p}$$

   ou en variables $(x_1, \ldots, x_p)$:

$$\Pi_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x}) = {\sum}'_{\sigma \in \mathfrak{D}_p} x_1^{n_{\sigma(1)}} x_2^{n_{\sigma(2)}} \cdots x_p^{n_{\sigma(p)}}$$

   ($\sum'$ désigne une sommation sur les $\sigma \in \mathfrak{D}_p$ qui induisent des permutations distinctes sur $\underline{n}$).

2. *pour tout polynôme symétrique $Q(\underline{x})$ de degré symétrique $< \underline{n}$,*

$$\int_{C_x} P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x}) Q(\underline{x}) dV_p^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x}) = 0$$

Ces deux conditions suffisent à définir $P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x})$. Soit $\tilde{P}_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y})$ le polynôme de Jacobi généralisé à m variables introduit à la *définition 4* exprimé dans les variables $\underline{y} = \dfrac{1-\underline{x}}{2}$. C'est à dire que:

$$\tilde{P}_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y}) = P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(1-2\underline{y}) = P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(1-2y_1,\ldots,1-2y_m)$$

On sait, cf. Debiard [7] proposition 2.8 et théorème 2.10, qu'il existe des constante $d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ telles que:

$$D_{+,\underline{x}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} P_{\underline{n}-1}^{(\alpha+1,\beta+1,\gamma)}(\underline{x}) = d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x})$$

Dans les nouvelles variables $\underline{y}$, cette relation devient:

$$\begin{aligned} D_{+,\underline{y}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}\left(\tilde{P}_{\underline{n}-1}^{(\alpha+1,\beta+1,\gamma)}(\underline{y})\right) &= (-2)^m d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \tilde{P}_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{y}) \\ &= (-2)^m d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(1-2\underline{y}) \qquad (17) \end{aligned}$$

Lemme 17 *Soit $\underline{n}-\underline{j}+\underline{1}$ la partition composée de m parts égales de taille $n-j+1$. Il existe une constante $K_n(a,b,c) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{j=0}^{n} c^m d_{\underline{n}-\underline{j}+\underline{1}}^{(\frac{a}{c}+j,\frac{b}{c}+j,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}$ telle que:*

$$\begin{aligned} A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = A_{n+1}^{(a,b,c)}(y_1,\ldots,y_m) = (-2)^{m(n+1)} K_n(a,b,c) \times \\ \times\Big(\prod_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(a+jc)\Gamma(b+jc)\Gamma((n+1-j)c)}{\Gamma(m+a+b+(n+j)c)\Gamma(c)}\Big) \tilde{P}_{n+1,\ldots,n+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(\underline{y}) \end{aligned}$$

□ Par définition:

$$A_n^{(a,b,c)}(\underline{y}) \;=\; \int_{F\in\mathcal{P}_n(t)} \left(\prod_{j=1}^{m} F(y_j)\right) |F(0)|^{a-1} \, |F(1)|^{b-1} \, |\Delta(F)|^{c-\frac{1}{2}} \, d\underline{F}$$

Si $n=0$ alors $\mathcal{P}_0(t)=\{1\}$ et donc $A_0^{(a,b,c)}(\underline{y}) = 1$. Par conséquent:

$$A_0^{(a+(n+1)c,b+(n+1)c,c)}(\underline{y}) = 1 = \tilde{P}_{0,0,\ldots,0}^{(\frac{a}{c}+n,\frac{b}{c}+n,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(\underline{y})$$

Le résultat découle du lemme 16 et de la formule (17). □

Théorème 2 *Soit $S_{n+1}^{(a,b,c)}$ l'intégrale de Selberg (cf. [30] ou la formule (2)). On a:*

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = (-2)^{-m(n+1)} S_{n+1}^{(a,b,c)} \cdot P_{n+1,\ldots,n+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(1-2\underline{y})$$

$$= (-2)^{-m(n+1)} \left(\prod_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(a+jc)\ \Gamma(b+jc)\ \Gamma((j+1)c)}{\Gamma(a+b+(n+j)c)\ \Gamma(c)} \right) P_{n+1,\ldots,n+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(1-2\underline{y})$$

□ Pour passer du lemme 17 au théorème il faut calculer la valeur de la constante $K_n(a,b,c)$. On le fait de la manière suivante, cf. aussi la remarque 4.4.1.

Par définition les polynômes de Jacobi généralisés symétriques, $P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\underline{x})$ sont unitaires et leur terme de degré symétrique maximal est $e_m(\underline{x})^n$ (cf. la définition 4). Or le coefficient du terme de plus haut degré symétrique de $A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y})$ est $\displaystyle\frac{1}{(n+1)!}\int_{\underline{x}\in[0,1]^{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1}\right) |V_{n+1}(\underline{x})|^{2c} d\underline{x}$ qui n'est autre que l'intégrale de Selberg classique (1) dont la valeur est connue. En tenant compte du fait que nous sommes en variables $\underline{y}$ il vient:

$$(-2)^{-m(n+1)} S_{n+1}^{(a,b,c)} =$$
$$= (-2)^{-m(n+1)} K_n(a,b,c) \prod_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(a+ic)\Gamma(b+ic)\Gamma((n+1-i)c)}{\Gamma(m+a+b+(n+i)c)\Gamma(c)}$$

On tire de là facilement à partir de la formule (17) que

$$A_{n+1}^{(a,b,c)}(\underline{y}) = (-2)^{m(n+1)} S_{n+1}^{(a,b,c)}\ P_{\underline{n}+1}^{(\frac{a}{c}-1,\frac{b}{c}-1,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})}(1-2\underline{y})$$

. □

4.4.1 Remarque 2

On peut retrouver le théorème 2 en utilisant les valeurs données par Debiard pour les constantes $d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. En effet on a (cf. [7] lemme 3.5):

$d_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = (-1)^m \displaystyle\prod_{j=1}^{m} \left(n+\alpha+\beta+1+(m-j)\frac{2\gamma+1}{2}\right)$ et donc:

$$d_{\underline{n}-\underline{j}+\underline{1}}^{(\frac{a}{c}+j,\frac{b}{c}+j,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})} = (-1)^m \prod_{j=1}^{m} \left(n+j+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{m-j}{c}\right)$$

De là on tire :

$$\Gamma(m+a+b+(n+j)c)\, d_{\underline{n}-\underline{j}+\underline{1}}^{(\frac{a}{c}+j,\frac{b}{c}+j,\frac{1}{c}-\frac{1}{2})} = (-c)^m \Gamma(a+b+(n+j-1)c)$$

Le théorème est alors immédiat.

4.4.2 Remarque 3

Ici la normalisation utilisée dans [7] est donc plus agréable que la normalisation ordinaire, cf. [29], pour les polynômes de Jacobi.

4.4.3 Remarque 4

Dans le théorème 2 on peut égaler certaines des variables y_i. Ce théorème nous permet donc de calculer au moins théoriquement des intégrales du type:

$$\int_{[0,1]^n} \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(y_j-x_i)^{n_j} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i-x_j|^{2c}\, d\underline{x} \tag{18}$$

où les n_j sont des entiers positifs.

Nous reviendrons sur ce problème ultérieurement.

4.4.4 Remarque 5

Même dans le cas où $\mathcal{X}(\underline{x})$ est un produit de fonctions symétriques élémentaires, le théorème 2 ainsi que la remarque 4.4.3 ne donnent pas une réponse totalement satisfaisante au problème du calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{n!}\int_{[0,1]^n} \mathcal{X}(\underline{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1}(1-x_i)^{b-1} \prod_{1\le i<j\le n} |x_i-x_j|^{2c}\, d\underline{x}$$

En effet les coefficients des polynômes de Jacobi généralisés symétriques $P_{\underline{n}}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(1-2y_1,\ldots,1-2y_m)$ ne sont connus explicitement que pour quelques valeurs particulières de n et m, [8]. Nous reviendrons sur ce problème ultérieurement.

Bibliographie

[1] Greg W. ANDERSON, *A short Proof of Selberg's Generalized Beta Formula*, Forum Mathematicum vol. 3 (1991), p. 415-417.

[2] Greg W. ANDERSON, *The Evaluation of Selberg Sums*, C.R. Acad Sci. Paris t. 311, Série I, p469-472, 1990.

[3] Kazuhiko AOMOTO, *Jacobi Polynomials associated with Selberg Integrals* , S.I.A.M. Journal Math. Analysis vol 18 (1987), p. 545-549.

[4] Kazuhiko AOMOTO, *Correlation function of the Selberg Integral*, in *Ramanujan Revisited* Proceedings of the Centenary Conference *University of Illinois at Urbana-Champaign June 1-5, 1987*; G.E ANDREWS, R.A. ASKEY, B.C. BERNDT, K.G. RAMANATHAN, R.A. RANKIN Editors; Academic Press Inc., 1988.

[5] Daniel BARSKY & Michel CARPENTIER, *Intégrales de Selberg généralisées*, Prépublication Mathématiques de l'Université Paris-Nord, n° 94–15, 1994.

[6] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitre 6 systèmes de racines, Hermann, Paris 1968.

[7] Amédée DEBIARD, *Système Différentiel Hypergéométrique de Type* BC_p, Lectures Notes in Math., 1293, Séminaire d'algèbre, M.-P. MALLIAVIN éd. Springer-Verlag, 1988.

[8] Amédée DEBIARD, *Représentation intégrale de certaines séries de fonctions sphériques d'un système de racines* BC, Journal of Funct. Analysis vol.96 (1991), p. 256-296.

[9] Amédée DEBIARD & Bernard GAVEAU, *Hypergeometric Ladders and Spherical Polynomials for Root System of Rank 2*, Annali di Matematica Pura ed Applicata (IV), vol CLX (1991), p. 235-301.

[10] Amédée DEBIARD & Bernard GAVEAU, Integral Formulas for the Spherical Polynomials of a Root System of Type BC_2, Preprint 1993.

[11] Ronald J. EVANS, *Identities for Products of Gauss Sums over Finite Fields*, Ens. Math. vol. 27 (1981) p.197-209.

[12] Ronald J. Evans, *Multidimensional Beta and Gamma Integrals*, Contemporary Mathematics vol 166, p. 341-357, 1994.

[13] Laurent Habsieger, *La q-conjecture de Macdonald-Morris pour G_2*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Séeie 1, 6 (1986), p. 211-214.

[14] G. J. Heckman & E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math., vol. 64 (1987), p. 329-352.

[15] G. J. Heckman,*Root systems and hypergeometric functions II*, Comp. Math., vol. 64 (1987), p. 353-373.

[16] Kevin W. J. Kadell, *A proof of the q-Macdonald conjecture for BC_n*, Memoirs of the AMS, vol 108, n° 516, March 1994.

[17] Joychi Kaneko, *Selberg Integrals and hypergeometric Functions Associated with Jack Polynomials*, S.I.A.M. Journal on Mathematical Analysis vol 24 (1993), p. 1086-1110.

[18] B. Hoogenboom-T.H. Koornwinder Centrum voor Wiskunde en informatica (Amsterdam) (1986) p.1-16.

[19] T.H. Koornwinder, *Orthogonal Polynomials in Two variables which are Eigenfunctions of two algebraically independant partial differential Operators I, II*, Indagationes Math. vol 36 (1974), p. 46-86.

[20] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachussetts, 1965.

[21] Francois Loeser & Claude Sabbah, *Equations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes*, Comment. Math. Helv. vol. 66 (1991), p. 458-503.

[22] Ian G. Macdonald, *Some Conjectures for Roots Systems*, S.I.A.M. Journal Math. Analysis vol. 13 (1982) p. 988-1007.

[23] Ian G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press.Oxford (1979).

[24] Katsuhisa Mimachi, *Reducibility and Irreducibility of the Gauss-Manin System associated with a Selberg Type Integral*, Nagoya Math. Journal vol. 132 (1993), p. 43-62

[25] Walter G. MORRIS, *Constant Term Identities for Finite and Affine Root Systems; Conjectures and Theorems*, PhD thesis (1982) University of Wisconsin-Madison.

[26] E. M.OPDAM, *Root systems and hypergeometric functions III*, Comp. Math., vol. 67 (1988), p. 21-49.

[27] E. M. OPDAM, *Root systems and hypergeometric functions IV*, Comp. Math., vol. 67 (1988), p. 191-209.

[28] E. M. OPDAM, *Some applications of hypergeometric shift operators*, Inv. Math., vol. 98 (1989), p. 1-18.

[29] Earl D. RAINVILLE, *Special Functions*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York (1960).

[30] Atlee SELBERG, *Bemerkninger om et multiplielt Integral*, Norske Math. Tidsskr vol. 26 (1944), p. 71-78.

[31] Tomohide TERASOMA, *A Product Formula for Period Integrals*, Math. Ann. Bd 298 (1994), p. 577-589.

[32] Tomohide TERASOMA, *Determinant of q-hypergeometric functions and another proof of Askey conjecture*, Preprint (1994).

[33] L. VRETARE, *Formulas for elementary spherical functions and generalized Jacobi polynomials*, SIAM Journal Math. Analysis vol.15 (1984), p. 805-833.

[34] Doron ZEILBERGER, *A proof of the G_2 case of Macdonald's root system-conjecture*, SIAM J. Math. analysis vol. 18 (1987), p. 880-883.