Ordres bipartitionnaires et statistiques sur les mots

Guo-Niu HAN (*)

Dédié à Dominique Foata à l'occasion de son soixantième anniversaire

Submitted : February 9, 1995 ; Accepted : March 28, 1995

RÉSUMÉ. — Soit U un ensemble de couples de lettres. Foata et Zeilberger [FZ] ont introduit les U-statistiques pour les mots quelconques. Dans cette note, on établit une condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions "maj_U" et "$\mathrm{maj2}_U$", qu'on rencontre dans le cas classique [H], sont équivalentes. Il est remarquable que cette condition est exactement la même que celle qui a été trouvée pour l'équidistribution des deux statistiques "maj_U" et "inv_U".

1. Introduction. — Soient X un alphabet et X^* le monoïde libre engendré par X. Si $w = x_1x_2\cdots x_m \in X^*$ est un mot de longueur m, on appelle *réarrangement* de w tout mot $u = x_{\sigma_1}x_{\sigma_2}\cdots x_{\sigma_m}$, où σ est une permutation appartenant à $\mathfrak{S}_m$. On note $R(w)$ la classe de tous les réarrangements du mot w.

On représente les sous-ensembles $U \subset X \times X$ comme suit : pour tout $x, y \in X$, on écrit $x \succ y$ si $(x,y) \in U$ et $x \not\succ y$ si $(x,y) \notin U$. Un sous-ensemble U est appelé *ordre bipartitionnaire*, (**) si les deux conditions suivantes sont remplies :

$$z \succ y \text{ et } y \succ x \Longrightarrow z \succ x; \tag{1}$$

$$z \succ y \text{ et } x \not\succ y \Longrightarrow z \succ x. \tag{2}$$

Pour une relation $U \subset X \times X$ quelconque, on généralise les statistiques classiques "inv" (nombre d'inversions) et "maj" (indice majeur) pour les mots quelconques de la façon suivante. Soit $w = x_1x_2\cdots x_m \in X^*$ un mot, on définit :

$$\mathrm{inv}_U\, w = \mathrm{Card}\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le m, x_i \succ x_j\},$$
$$\mathrm{maj}_U\, w = \sum\{i \mid 1 \le i \le n-1,\ x_i \succ x_{i+1}\}.$$

Lorsque X est totalement ordonné, l'ordre sous-jacent "$>$" vérifie bien les deux conditions (1) et (2), et est donc bipartitionnaire. Lorsque le sous-ensemble U est cet ordre, c'est-à-dire, $x \succ y$ si et seulement si $x > y$, on a alors $\mathrm{inv}_U = \mathrm{inv}$ et $\mathrm{maj}_U = \mathrm{maj}$. De plus, on peut vérifier que les deux statistiques précédentes généralisent les statistiques inv_k et maj_k introduites dans [CF2]. Un autre exemple d'ordre bipartitionnaire se trouve dans

(*) Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994-95.

(**) Cette définition est différente de celle qui a été donnée dans [FZ]. Le théorème 5 dans la dernière section montre que ces deux définitions sont équivalentes.

la section 3. Le nombre des ordres bipartitionnaires B_r sur un alphabet de cardinal r est donné par la fonction génératrice suivante [FZ] :

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0} B_r \frac{u^r}{r!} &= \frac{1}{3-2e^u}\\ &= 1+2u+10\frac{u^2}{2!}+74\frac{u^3}{3!}+730\frac{u^4}{4!}+9002\frac{u^5}{5!}+\cdots\end{aligned}$$

Foata et Zeilberger ont établi le résultat suivant [FZ] :

THÉORÈME 1 (FOATA et ZEILBERGER). — *Les deux statistiques* maj_U *et* inv_U *sont équidistribuées, si et seulement si le sous-ensemble* U *est un ordre bipartitionnaire.*

Depuis [H], on sait qu'il existe une autre définition "$\mathrm{maj2}_U$" qui est équivalente à "maj" dans le cas classique. Cette statistique peut être aussi généralisée pour un sous-ensemble $U \in X \times X$ quelconque. La définition de "$\mathrm{maj2}_U$" se trouve dans la section 2. Dans cette note, on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les deux statistiques* maj_U *et* $\mathrm{maj2}_U$ *sont équivalentes, si et seulement si le sous-ensemble* U *est un ordre bipartitionnaire.*

D'après les deux théorèmes précédents, on peut dire que les ordres bipartitionnaires sont des objets combinatoires "naturels".

2. Intervalles cycliques. — Pour $x, y \in X$, l'*intervalle cyclique* (généralisé), noté $]\!]x,y]\!]_U$, est défini par

$$]\!]x,y]\!]_U = \begin{cases} \{z\in X \mid z\succ x \text{ et } z\not\succ y\}, & \text{si } x\not\succ y\,;\\ \{z\in X \mid z\succ x \text{ ou } z\not\succ y\}, & \text{si } x\succ y.\end{cases}$$

Parfois, on a besoin d'ajouter l'élément "∞" dans notre alphabet pour former l'ensemble $[r]\cup\{\infty\}$, et on suppose alors $x\not\succ\infty$ et $\infty\succ x$ pour tout x. Dans ce cas, on a $z\in\,]\!]x,\infty]\!]_U$ si et seulement si $z\succ x$. Deux exemples d' intervalle cyclique se trouvent dans la section 3.

Soient $w = x_1x_2\cdots x_m \in X^*$ un mot et $S\subset X$, on note

$$\langle w\,,\,S\rangle = \#\{i \mid 1\leq i\leq m, x_i\in S\}.$$

Soient $w = x_1x_2\cdots x_m, u \in X^*$ deux mots et $S, T\in X$ deux sous-ensembles. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered}\langle w\,,\,\emptyset\rangle = 0\,,\ \ \langle w\,,\,X\rangle = m,\\ \langle wu\,,\,S\rangle = \langle w\,,\,S\rangle + \langle u\,,\,S\rangle,\\ \langle w\,,\,S\rangle + \langle w\,,\,T\rangle = \langle w\,,\,S\cup T\rangle + \langle w\,,\,S\cap T\rangle.\end{gathered}$$

DÉFINITION. — Soient $w = x_1 x_2 \cdots x_m$ un mot. Avec la convention $x_{n+1} = \infty$, on définit :

$$\mathrm{maj2}_U\, w = \sum_{j=1}^{m} \langle x_1 x_2 \cdots x_{j-1}\, ,\, \rrbracket x_j, x_{j+1} \rrbracket_U \rangle\ .$$

La suite $(s_j)_{1 \le j \le m}$ où $s_j = \langle x_1 x_2 \cdots x_{j-1}\, ,\, \rrbracket x_j, x_{j+1} \rrbracket_U \rangle$ est appelée *maj-codage* du mot w.

3. Exemple. — Considérons l'alphabet $X = \{0, 1, 2, \cdots, 6\}$. On vérifie que l'ensemble

$$U = \left\{ \begin{array}{llllll} 0 \succ 0, & 0 \succ 1, & & & & \\ 1 \succ 0, & 1 \succ 1, & & & & \\ 2 \succ 0, & 2 \succ 1, & 2 \succ 2, & & & \\ 3 \succ 0, & 3 \succ 1, & 3 \succ 2, & & & \\ 4 \succ 0, & 4 \succ 1, & 4 \succ 2, & & & \\ 5 \succ 0, & 5 \succ 1, & 5 \succ 2, & & & \\ 6 \succ 0, & 6 \succ 1, & 6 \succ 2, & 6 \succ 3, & 6 \succ 4, & 6 \succ 5 \end{array} \right\}$$

est bien un ordre bipartitionnaire. On a par exemple les intevalles cycliques $\rrbracket 6, 2 \rrbracket_U = \{0, 1\}$ et $\rrbracket 2, 3 \rrbracket_U = \rrbracket 2, 4 \rrbracket_U = \rrbracket 2, 5 \rrbracket_U = \{2, 3, 4, 5\}$. Pour le mot $w = 315016406254320$, on a $\mathrm{maj}_U\, w = 1{+}3{+}4{+}6{+}7{+}9{+}13{+}14 = 57$ et $\mathrm{maj2}_U\, w = 1{+}3{+}4{+}5{+}1{+}6{+}5{+}3{+}6{+}9{+}14 = 57$. Les calculs complets sont consignés dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	3	1	5	0	1	6	4	0	6	2	5	4	3	2	0
descente	—		—	—		—	—		—				—	—	
s_i	0	1	0	3	4	5	1	7	4	3	0	0	6	9	14

4. Propriétés des intervalles cycliques. — Soit $U \in X \times X$ un sous-ensemble. Pour abréger les écritures, notons $A = \rrbracket y, \infty \rrbracket_U, B = \rrbracket x, y \rrbracket_U, C = \rrbracket x, \infty \rrbracket_U$ pour deux lettres $x, y \in X$. On a le résultat suivant :

LEMME 3. — *Le sous-ensemble U est un ordre bipartitionnaire, si et seulement si, pour tout $x, y \in X$, les relations entre A, B et C suivants sont remplies* :

(i) *si $x \not\succ y$, alors $A \cap B = \emptyset, A \cup B = C$* ;

(ii) *si $x \succ y$, alors $A \cap B = C, A \cup B = X$.*

Démonstration. — La partie "si". — D'après la condition (i), pour tout x, y, si $x \not\succ y$ et $z \in A$, alors $z \in C$. Ceci démontre la relation (1) de la section 1. D'après la condition (ii), pour tout x, y, si $x \succ y$ et $z \in C$, alors $z \in A$. Ceci démontre la relation (2) de la section 1.

La partie "seulement si". — Dans le premier cas, i.e., $x \not\succ y$, on vérifie :

- Si $z \in C$, alors $z \succ x$. Dans ce cas, on a ou bien $z \succ y$, $z \in A$ et $z \notin B$; ou bien $z \not\succ y$, $z \in B$ et $z \notin A$;

- Si $z \in A$, alors $z \succ y$. D'après la relation (1), on a $z \succ x$, $z \in C$;
- Si $z \in B$, alors $z \succ x$ et $z \not\succ y$. On a $z \in C$.

Dans le second cas, i.e., $x \succ y$, on vérifie :

- Si $z \in C$, alors $z \succ x$, $z \in B$. D'autre part, d'après (2), on a $z \succ y$ et $z \in A$.
- Si $z \notin C$, i.e., $z \not\succ x$. Dans ce cas, si $z \succ y$, alors $z \in A$ et $z \notin B$; si $z \not\succ y$, alors $z \notin A$ et $z \in B$. ∎

5. Démonstration du théorème 2. — Posons $w' = x_1 x_2 \cdots x_{m-1}$. On note $(s_j)_{1\le j<m}$ et $(s'_j)_{1\le j<m-1}$ les maj-codages de w et de w' respectivement, il est clair qu'on a $s_j = s'_j$ pour tout $j < m-1$. Pour abréger les écritures, notons $A = \rrbracket x_m, \infty \rrbracket_U$, $B = \rrbracket x_{m-1}, x_m \rrbracket_U$, $C = \rrbracket x_{m-1}, \infty \rrbracket_U$ et $u = x_1 x_2 \cdots x_{m-2}$. On calcule maintenant

$$\begin{aligned}\Delta =& s_m + s_{m-1} - s'_{m-1}\\ =&\langle u x_{m-1}\,,\, A\rangle + \langle u\,,\, B\rangle - \langle u\,,\, C\rangle\\ =&\langle x_{m-1}\,,\, A\rangle + \langle u\,,\, A\cup B\rangle + \langle u\,,\, A\cap B\rangle - \langle u\,,\, C\rangle.\end{aligned}$$

La partie "si". — Si $x_{m-1} \not\succ x_m$, alors $x_{m-1} \notin A$. D'après les propriétés précédentes, on a

$$\Delta = 0 + \langle u\,,\, C\rangle + \langle u\,,\, \emptyset\rangle - \langle u\,,\, C\rangle = 0.$$

D'autre part, si $x_{m-1} \succ x_m$, alors $x_{m-1} \in A$, on a

$$\Delta = 1 + \langle u\,,\, X\rangle + \langle u\,,\, C\rangle - \langle u\,,\, C\rangle = m-1.$$

D'où $\mathrm{maj}_U\, w = \mathrm{maj2}_U\, w$ par récurrence sur la longueur m du mot w.

La partie "seulement si". — Puisque $\mathrm{maj}_U\, w = \mathrm{maj2}_U\, w$ pour tout w, on a $\Delta = 0$ si $x_{m-1} \not\succ x_m$ et $\Delta = m-1$ si $x_{m-1} \succ x_m$. Dans le premier cas, on a $\Delta = 0 + \langle u\,,\, A\cup B\rangle + \langle u\,,\, A\cap B\rangle - \langle u\,,\, C\rangle = 0$ pour *tout* u de longueur $m-2$, et forcément $A\cap B = \emptyset$ et $A \cup B = C$; et dans le second cas, on a $\Delta = 1 + \langle u\,,\, A\cup B\rangle + \langle u\,,\, A\cap B\rangle - \langle u\,,\, C\rangle = m-1$ pour *tout* u de longueur $m-2$, et forcément $A\cap B = C$ et $A\cup B = X$. D'après le lemme précédent, le sous-ensemble U est donc un ordre bipartitionnaire. ∎

6. Structures des ordres bipartitionnaires. — D'après la définition de l'ordre bipartitionnaire, on a immédiatement les propriétés suivantes :

$$x \not\succ y \text{ et } z \succ y \Longrightarrow x \not\succ z; \tag{3}$$

$$x \not\succ y \text{ et } y \not\succ z \Longrightarrow x \not\succ z; \tag{4}$$

$$x \succ y \text{ et } y \succ x \Longrightarrow x \succ x \text{ et } y \succ y; \tag{5}$$

$$x \not\succ y \text{ et } y \not\succ x \Longrightarrow x \not\succ x \text{ et } y \not\succ y. \tag{6}$$

Soit $U \subset X \times X$ un sous-ensemble quelconque. Pour tout $x, y \in X$, on dit que la lettre x est *incomparable* à y, si $x \succ y$ et $y \succ x$ ou bien si $x \not\succ y$ et $y \not\succ x$. On note $x \approx y$ si x est incomparable à y, et la relation "$\approx$" est appelée *relation d'incomparabilité* définie par U.

LEMME 4. — *Si $U \subset X \times X$ est un ordre bipartitionnaire, alors la relation d'incomparabilité "$\approx$" définie par U est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — La reflexivité et la symétrie sont évidentes d'après la définition. Pour la transitivité, on suppose $x \approx y$ et $y \approx z$. D'abord, si $x \succ y$ et $y \succ x$, on a $y \succ y$ d'après (5). On a alors $y \succ z$ et $z \succ y$. Ainsi, par la relation (1), on a $x \approx z$. Dans le second cas, si $x \not\succ y$ et $y \not\succ x$, c'est la même vérification. □

DÉFINITION. — Une *bipartition ordonnée* de X est une suite ordonnée $(B_1, B_2, \cdots, B_k)$ de blocs non vides, disjoints deux à deux, de reunion X, dont certains peuvent être soulignés.

THÉORÈME 5. — *Une relation U est bipartitionnaire, si et seulement s'il existe une bipartition ordonnée $B = (B_1, B_2, \cdots, B_k)$ de X, tel que*

$$y \succ x \iff \begin{array}{c} x \in B_l, y \in B_h, \textit{avec } l < h; \\ \textit{ou bien } x, y \in B_l, \textit{avec } B_l \textit{ souligné.} \end{array} \tag{7}$$

Démonstration. — La partie "si" est triviale : il est suffit de vérifier les deux relations (1) et (2) de la section 1. Pour la partie "seulement si", d'après le lemme précédent, l'ensemble quotient $X/\approx$ de X par rapport à la relation d'incomparabilité "$\approx$" existe. Il est clair qu'avec l'ordre induit par la relation U, cet ensemble $X/\approx$ est totalement ordonné. Soient $B_1, B_2, \cdots, B_k$ les éléments de $X/\approx$ suivant cet ordre total. On peut vérifier la relation (7) avec la suite de $B_1, B_2, \cdots, B_k$ ainsi définie. □

Exemple. — Pour la relation U donnée dans la section 3, la bipartition associée est $B = (\{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{2}\}, \{3, 4, 5\}, \{6\})$.

BIBLIOGRAPHIE

[CF1] R. J. CLARKE et D. FOATA. — Eulerian Calculus, I : Univariable Statistics, *Europ. J. Combinatorics*, t. **15**, 1994, p. 345-362.

[CF2] R. J. CLARKE et D. FOATA. — Eulerian calculus, II : An extension of Han's fundamental transformation, à paraître dans *Europ. J. Combinatorics*.

[FZ] D. FOATA et D. ZEILBERGER. — Graphical Major Indices, soumis pour publication, 1995.

[K] K. W. J. KADELL. — Weighted inversion numbers, restricted growth function, and standard Young tableaux, *J. Comb. Theory, Ser. A*, t. **40**, 1985, p. 22-44.

[H] G.-N. HAN. — Une transformation fondamentale sur les réarrangements de mots, *Advances in Math.*, t. **105**, 1994, p. 26-41.

I.R.M.A., Université Louis Pasteur & C.N.R.S.
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France
email : guoniu@math.u-strasbg.fr